



FUNDACIÓN EDUCACIONAL

Obra Don Orione Ñuñoa

Asignatura: Matemática

Profesor: Alejandro Susarte Torres

www.fundacioneducacionalobradonorione.cl

Guía de Estudio N°2

4° Medio - Matemática – Desigualdades

NOMBRE: _____ FECHA: _____

INSTRUCCIONES

- La guía debe ser resuelta en el cuaderno y entregada el miércoles 8 de abril a mi correo.
- Los ejercicios deben estar copiados y resueltos en forma ordenada (correlativamente) con el desarrollo correspondiente, destacando el resultado final.
- Si tienes dudas puedes consultar directamente a mi correo profeasusarte@gmail.com las dudas deben ser enviadas entre las 09:00 y las 17:00 horas.
- Puedes descargar algunas ayudas en la página <https://ayudas-en-matematica.webnode.es/> ahí también encontrarás las guías, las iré subiendo semanalmente.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Conocer la definición de una desigualdad, anticipándose a las inecuaciones.
- Reconocer propiedades de las inecuaciones

DESIGUALDADES

Una desigualdad es una relación entre dos cantidades que representan una comparación en la que se utilizan los siguientes símbolos.

$<$ Menor que	\rightarrow	$4 < 10$
$>$ Mayor que	\rightarrow	$-8 > -25$
\leq Menor o igual que	\rightarrow	$0,25 \leq 0,68$
\geq Mayor o igual que	\rightarrow	$50 \geq -60$

Una desigualdad es verdadera si la relación establecida en ella se cumple. Para verificarla, se puede calcular el valor de las expresiones a ambos lados de la desigualdad.

Ejemplos:

1. La entrada para un partido de fútbol supera los \$12.000.
Si se define como x el precio de la entrada, se debe cumplir que x debe ser mayor que \$12.000, luego la desigualdad que representa lo anterior es $x > 12.000$.
2. La desigualdad $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) < (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2$, ¿es correcta?
Para saber si se cumple o no la desigualdad se calcula el valor de cada expresión en ambos lados del símbolo ($<$), es decir:

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) &< (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 \\(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 &< (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 \\5 - 2 &< 5 + 2 \\3 &< 7\end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad anterior es correcta.

3. Compruebe si la desigualdad $a^2 + b^2 \leq 2ab$, se cumple $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Las desigualdades entre números reales cumplen diferentes propiedades, las que pueden aplicarse para resolver problemas expresados mediante una o más desigualdades.

Propiedades	Ejemplo
1. Si a ambos lados de una desigualdad se suma o resta un mismo número real, se obtiene otra desigualdad equivalente a la primera, que mantiene su sentido $a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$	$5 \leq 8$ $5 - 3 \leq 8 - 3$ $2 \leq 5$
2. Toda desigualdad es equivalente a la diferencia entre el miembro mayor y el menor, dicha diferencia es siempre mayor o igual que cero. $a \leq b \Leftrightarrow (b - a) \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$	$8 \geq 5$ $(8 - 5) \geq 0$ $3 \geq 0$

3. Si se suman, respectivamente, los lados de dos o más desigualdades, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido el sentido de las desigualdades consideradas. $a \leq b, c \leq d \Leftrightarrow a + c \leq b + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$	$5 \leq 8 ; 3 \leq 6$ $5 + 3 \leq 8 + 6$ $8 \leq 14$
4. Si ambos lados de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número real positivo, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido de la primera. $a \leq b, c > 0 \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \vee \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$	$7 \leq 9, 2 > 0$ $7 \cdot 2 \leq 9 \cdot 2$ $14 \leq 18$
5. Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número real negativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido que en la primera. $a \leq b, c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \vee \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$	$5 \leq 8, -2 < 0$ $5 \cdot -2 \leq 8 \cdot -2$ $-10 \geq -16$
6. Si cada lado de una desigualdad de números reales positivos se transforma en su correspondiente inverso multiplicativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido que el de la primera. $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}; a, b \in \mathbb{R}^+$	$3 \leq 7$ $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{7}$
7. Si a ambos lados de una desigualdad de números reales no negativos se le extrae su raíz cuadrada, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido de la primera. $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\frac{9}{16} \leq 36$ $\sqrt{\frac{9}{16}} \leq \sqrt{36}$ $\frac{3}{4} \leq 6$

INTERVALOS

En la recta numérica se muestra la representación de todos los números reales que cumplen la condición $-2 < x \leq 1$.



Lo anterior se puede escribir utilizando un intervalo de números reales, que se representa por $] -2, 1]$. La relación entre la recta numérica y el intervalo es la siguiente.

Es abierto en -2, porque el conjunto no incluye dicho número. En la recta se representa con \circ



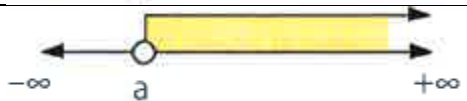
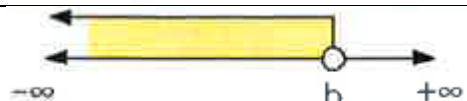



Es cerrado en 1, porque el conjunto incluye dicho número. En la recta se representa con \bullet

La orientación de los corchetes representa si los extremos del intervalo forman parte del conjunto o no.

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen los siguientes tipos de intervalos.

TIPO DE INTERVALO	INTERVALO	POR COMPRESIÓN	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Abierto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	

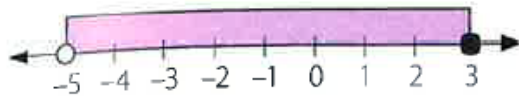
	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
No acotado o infinito	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	$] -\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	
	$] -\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	

Ejemplos:

Al representar los intervalos de manera gráfica y por comprensión, se tiene:

1. $A =]-5, 3]$

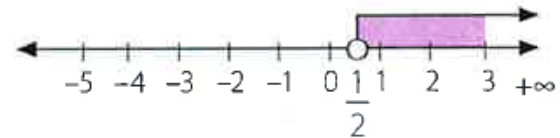
Gráfico.



$$A = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq 3\}$$

2. $B =]\frac{1}{2}, +\infty[$

Gráfico.



$$B = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2}\right\}$$

En síntesis.

Un intervalo es un subconjunto de los números reales, el que puede estar comprendido entre otro dos números reales. Estos números se denominan extremos del intervalo, los cuales pueden estar incluidos o no en el intervalo. Si se incluyen los extremos se utilizan los símbolos \geq , \leq , y si no se incluyen se usan $>$, $<$.

Los intervalos se pueden representar gráficamente en la recta numérica, ya sea por una semirecta o una parte de esta.

Ejercicios.

Representa los siguientes intervalos de manera gráfica y por comprensión.

1. $[-2, 2]$

4. $[7, +\infty[$

2. $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$

5. $[\sqrt{5}, \sqrt{8}]$

3. $[0, 3[$

6. $] -\infty, -11[$

Representa los siguientes conjuntos escritos por comprensión de manera gráfica y como intervalos.

7. $\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

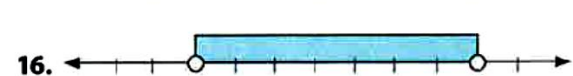
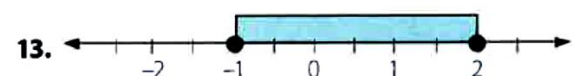
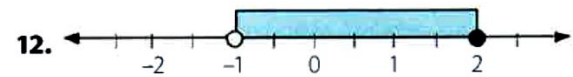
8. $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 0\}$

9. $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x\}$

10. $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{13}{9}\right\}$

11. $\{x \in \mathbb{R} / -0,5 < x < 3,45\}$

Representa los siguientes gráficos como conjuntos escritos por comprensión e intervalos.



UNIÓN E INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

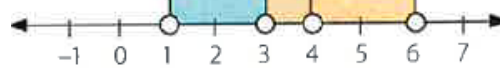
Para la unión (\cup) de dos o más intervalos se deben considerar todos los elementos de cada uno de ellos, y para la intersección (\cap), se deben considerar los elementos que tienen en común estos intervalos.

Ejemplo.

1. Se definen los siguientes intervalos $A =]1, 4[$ y $B =]3, 6[$. Determina la unión e intersección de los intervalos, y luego represéntalos como conjunto escrito por comprensión y en la recta numérica.

- $A \cup B =]1, 4[\cup]3, 6[=]1, 6[$
La representación por comprensión es: $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 6\}$

Su representación gráfica es.



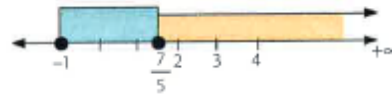
- $A \cap B =]1, 4[\cap]3, 6[=]3, 4[$
La representación por comprensión es $\{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$

Su representación gráfica es:

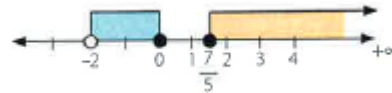


2. Considerando los intervalos $A =]-2, 0]$; $B = \left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$ y $C = \left[-1, \frac{7}{5}\right]$ determina cada unión e intersección de intervalos y luego represéntalos de manera gráfica.

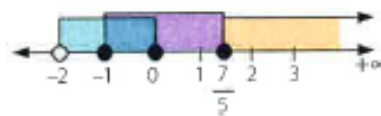
- $B \cap C = \left[\frac{7}{5}, +\infty\right[\cap \left[-1, \frac{7}{5}\right] = \left\{\frac{7}{5}\right\}$



- $A \cap B =]-2, 0] \cap \left[\frac{7}{5}, +\infty\right[= \emptyset$



- $A \cup B \cup C =]-2, 0] \cup \left[\frac{7}{5}, +\infty\right[\cup \left[-1, \frac{7}{5}\right] =]-2, +\infty[$



Al considerar A, B y C intervalos en \mathbb{R} , se tiene las siguientes propiedades:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a. $A \cup \emptyset = A$ | b. $A \cup A = A$ |
| c. $A \cup B = B \cup A$ | d. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| e. $A \cap \emptyset = \emptyset$ | f. $A \cap A = A$ |
| g. $A \cap B = B \cap A$ | h. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |

Ejercicios.

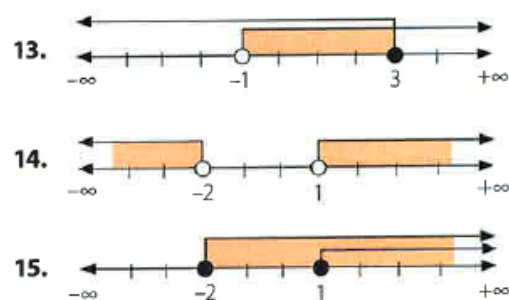
Determina las siguientes uniones e intersecciones de intervalos. Expresa tu resultado como intervalo y represéntalo gráficamente en la recta real.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $[3, 5] \cup]2, 6[$ | 4. $[\sqrt{8}, \sqrt{16}] \cup]\sqrt{3}, \sqrt{9}[$ |
| 2. $]0, 1] \cap]0, 4[$ | 5. $\left[\frac{1}{100}, 5\right] \cap \left]-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right]$ |
| 3. $]2, 4[\cup]3, 1; 4, 5]$ | 6. $]1, \sqrt{25}[\cap]5, \sqrt{49}[$ |

A partir de los intervalos $A = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, $B =]-\infty, 0]$ y $C =]0, 4[$ grafica las siguientes uniones e intersecciones y representa el resultado como un intervalo.

- | | |
|---------------|-----------------------|
| 7. $A \cup B$ | 10. $A \cap C$ |
| 8. $A \cap B$ | 11. $A \cup B \cup C$ |
| 9. $B \cup C$ | 12. $A \cap B \cap C$ |

Escribe como unión e intersección de intervalos las siguientes representaciones gráficas.



Si $a, b \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la restricción de a y b para que se cumpla cada condición?

16. $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[= \mathbb{R}$
 17. $]-\infty, a] \cap [b, +\infty[= \emptyset$
 18. $]-\infty, a] \cap [b, +\infty[= [b, a]$